IL CALCOLO RAGIONATO

Gianfranco Arrigo
Forlì, 11-12 giugno 2019

Esempi tratti dai quaderni di matematica
I nostri amici numeri, voll. I/II – III – IV/V
e relativi fascicoli estivi
Sapyent editore, Milano, 2018
Autori: G. Arrigo, M. Giacobbe e L. Maurizi

Calcolo ragionato

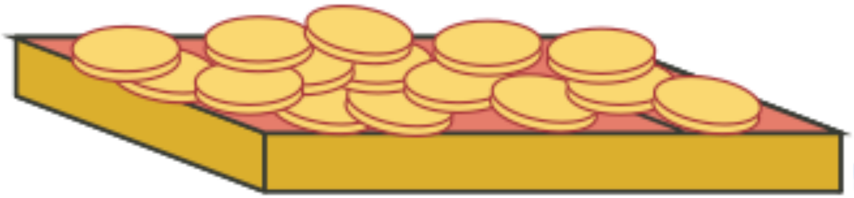
- competenza nel calcolo mentale
- competenza nel calcolo scritto
- educazione pre-algebrica

Sapyent

Contare, raggruppare e base 10

Da quad. I-II

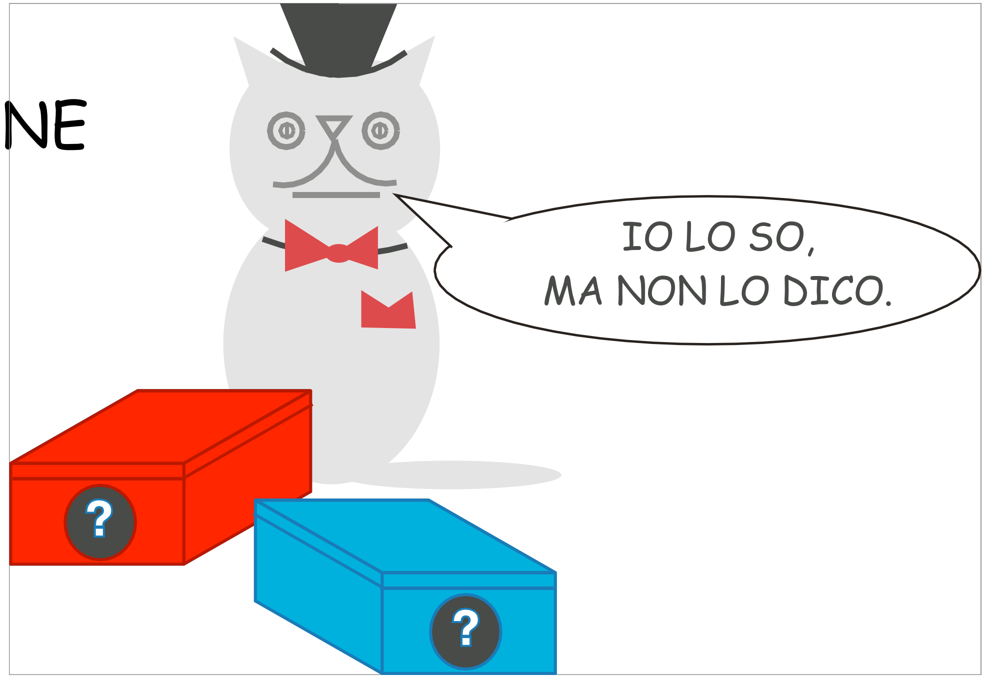
MELE	GRUPPI DA 4	MELE SOLE
	2	3

	GRUPPO DI 10 DECINA (da)	MONETE SOLE UNITÀ (u)
	1	5
	IN CIFRE 15	

Primi calcoli

Da quad. I-II

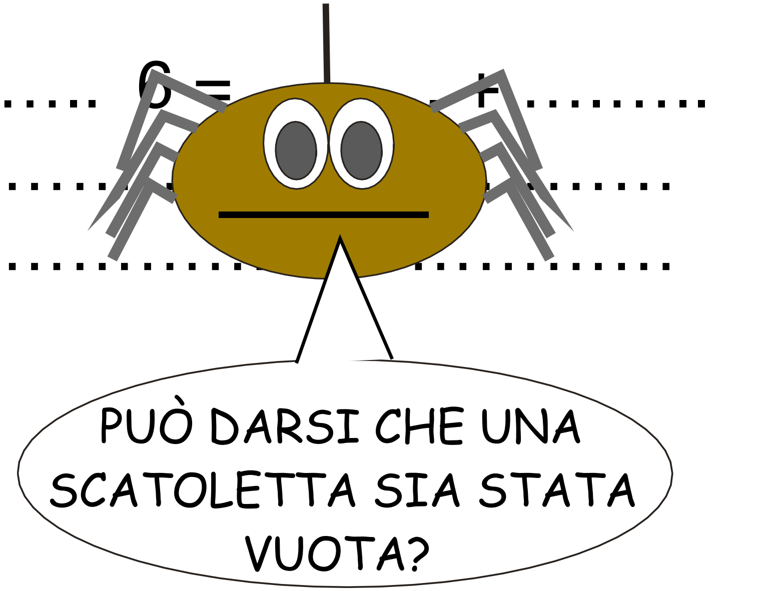
ARTURO PORTA DUE SCATOLETTE DI MACCHININE PER GIOCARE CON I SUOI AMICI. LE VUOTA SUL TAVOLO ED ESCONO 6 MACCHININE.
QUANTE MACCHININE POTEVANO ESSERCI IN OGNI SCATOLETTA?



6 = ... + ...   6 = ... + ...   6 = ... + ...

....

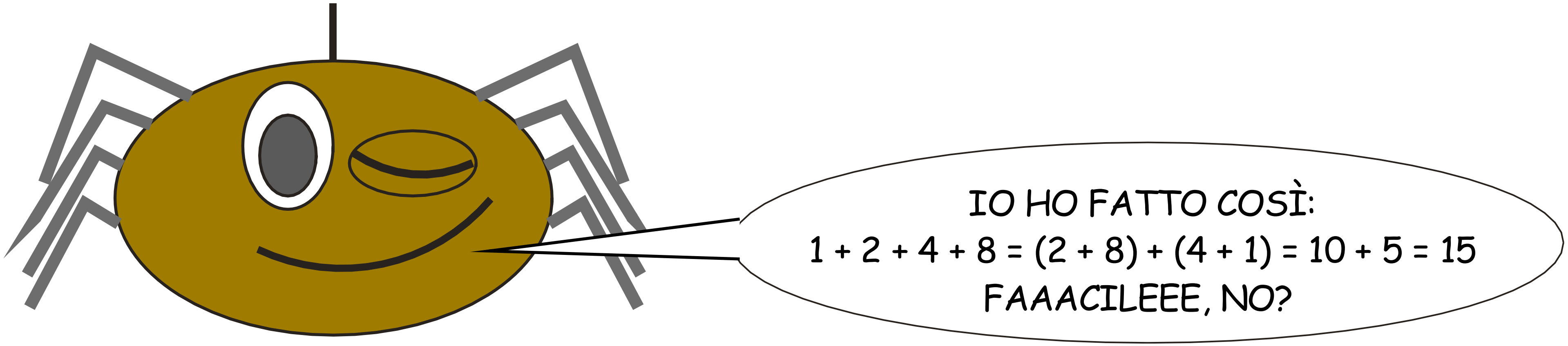
....



Primi calcoli

Da quad. I-II

I NOSTRI AMICI SONO ANDATI A CERCARE FUNGHI. ERCOLINO HA TROVATO UN SOLO PORCINO. FILIBERTO NE HA TROVATI 2.
ARTURO NE HA TROVATI IL DOPPIO DI FILIBERTO
E GENOVEFFA IL DOPPIO DI ARTURO.
QUANTI PORCINI HANNO COLTO IN TUTTO I NOSTRI AMICI?



L' addizione, ossia l'operazione di base

La **scomposizione additiva** di un numero naturale è un passo basilare nell'apprendimento. Per esempio.

5 = 0+5 = 1+4 = 2+3 =… ; 10 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = …

E anche: 100 = 70+30   70 = 50+20   1000 = 700+300

57 + 20   84 + 40   128 + 100   570 + 200   …

La scomposizione additiva nel calcolo

7 + 8 = 7 + (3+5) = (7+3) + 5 = 10 + 5 = 15   (…)

70 + 80 = 150   (…)

17 + 38 = 10 + 30 + (7+8) = 40 + 15 = 55   (…)

717 + 838 = 700 + 800 + (17+38) = 1' 500 + 55 = 1' 555   (…)

Sapyent

Calcolo ragionato

Questo modo di eseguire i calcoli lo chiamiamo **calcolo ragionato**. Introduce l'allievo gradatamente, in modo armonioso, nel **linguaggio algebrico** (prime espressioni di **calcolo in riga**). Il calcolo è reso **esplicito**, l'allievo procede seguendo un proprio ragionamento. Vi sono più vie risolutive, anche nel modo di scriverle. Per esempio:

247 + 465 = 2 h + 4 da + 7 u + 4 h + 6 da + 5 u =

= 6 h + 10 da + 12 u = 6 h + 1 h + 1 da + 2 u = 7 h + 1 da + 2 u

= (247+500) – 35 = 747 – 35 = (747–30) – 5 = 717–5 = 712

= ((250+500) – 3) – 35 = (750–3) – 35 = 747 – 35 =

= (747–40) + 5 = 707 + 5 = 712 (…)

Sapyent

Promemoria di Genoveffa

Da quad. IV-V

- In generale per addizionare devi scomporre prima gli addendi in u, da, h, k, poi sommare separatamente.
  Per esempio: 275 + 134 =
  = (200 +70 + 5) + (100 + 30 + 4) = 300 + 100 + 9 = 409
- Se devi addizionare multipli di 10 o di 100, lavora solo sulle cifre delle decine o delle centinaia.
  Per esempio: 357 + 400 = 757
- Se vedi due addendi con le cifre delle unità che sommate danno 10, addizionali subito. Per esempio:
  132 + 19 + 21 = 132 + (19+21) = 132 + 40 = 172
- Ogni addizione di più numeri la puoi calcolare iniziando da dove desideri e procedendo liberamente, prendendo tutti gli addendi una sola volta. Per esempio:
  24 + 78 + 76 = (24 + 76) + 78 = 100 + 78 = 178

Promemoria di Genoveffa

Da quad. IV-V

- Se non trovi nessuno di questi casi fortunati, puoi crearli tu scomponendo almeno un addendo. Per esempio:
  145 + 157 + 34 = (145 + 155) + 2 + 34 = 300 + 36 = 336
- Se vi sono tanti addendi uguali che si ripetono, usa la moltiplicazione. Per esempio:
  8+8+8+8+8+8 = 8 x 6 = 48
- Se devi addizionare molti numeri vicini, può essere utile scegliere un numero vicino comodo e usare la moltiplicazione. Per esempio:
  54 + 47 + 51 + 48 + 55 = 50 x 5 + (4–3+1–2+5) =
  = 250 + 5 = 255

[Altra possibilità: il metodo in colonna,presentato sul quaderno di IV-V]

In classe IV: strategie diverse

$$436 + 237 = (436 + 234) + 3 =$$

$$237 \to 234 + 3$$

$$= 670 + 3 = 673$$

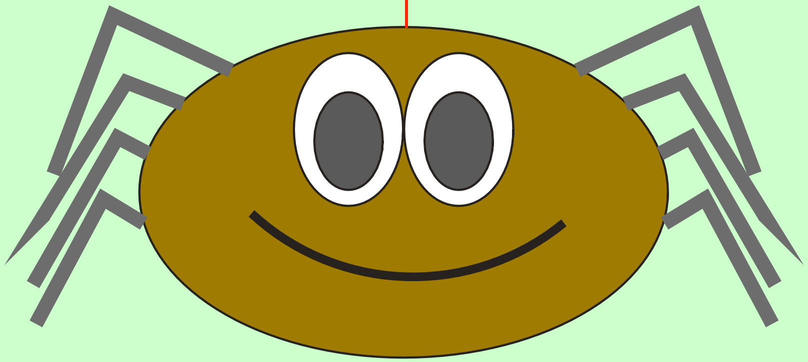
$$436 + 237 = (400 + 200) + (30 + 30) + (6 + 7)$$

$$= 600 + 60 + 13 = 673$$

$$436 + 237 = (436 + 240) - 3 = 676 - 3 = 6$$ [673]

$$436 + 237 = [(436 + 200) + 30] + 7 =$$

$$= [636 + 30] + 7 = 666 + 7 = 67?$$ [673]



ESERCIZIO

ADDIZIONE

Esempi

87 + 36 = 80 + 7 + 30 + 6 = 110 + 13 = 123

87 + 36 = 8 da + 7 u + 3 da + 6 u = 11 da + 13 u = 1 h + 1 da + 1 da + 3 u = 1 h + 2 da + 3 u

37 + 126 + 63 + 24 = (37 + 63) + (126 + 24) = 100 + 150 = 250

55 + 238 + 28 + 15 = (55 + 15) + (238 + 22) + 6 = 70 + 260 + 6 = 336

44 + 39 + 38 + 41 + 42 + 37 = 40 × 6 + 4 – 1 – 2 + 1 + 2 – 3 = 240 + 1 = 241

Altri esempi

23 + 148 + 55 + 65 + 177 =

47 + 55 + 78 =

21 + 20 + 24 + 17 + 21 + 18 + 22 + 20 + 17 + 22 =

Per divertirsi

- somma dei primi 10 numeri naturali

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =

- somma dei primi 10 numeri quadrati

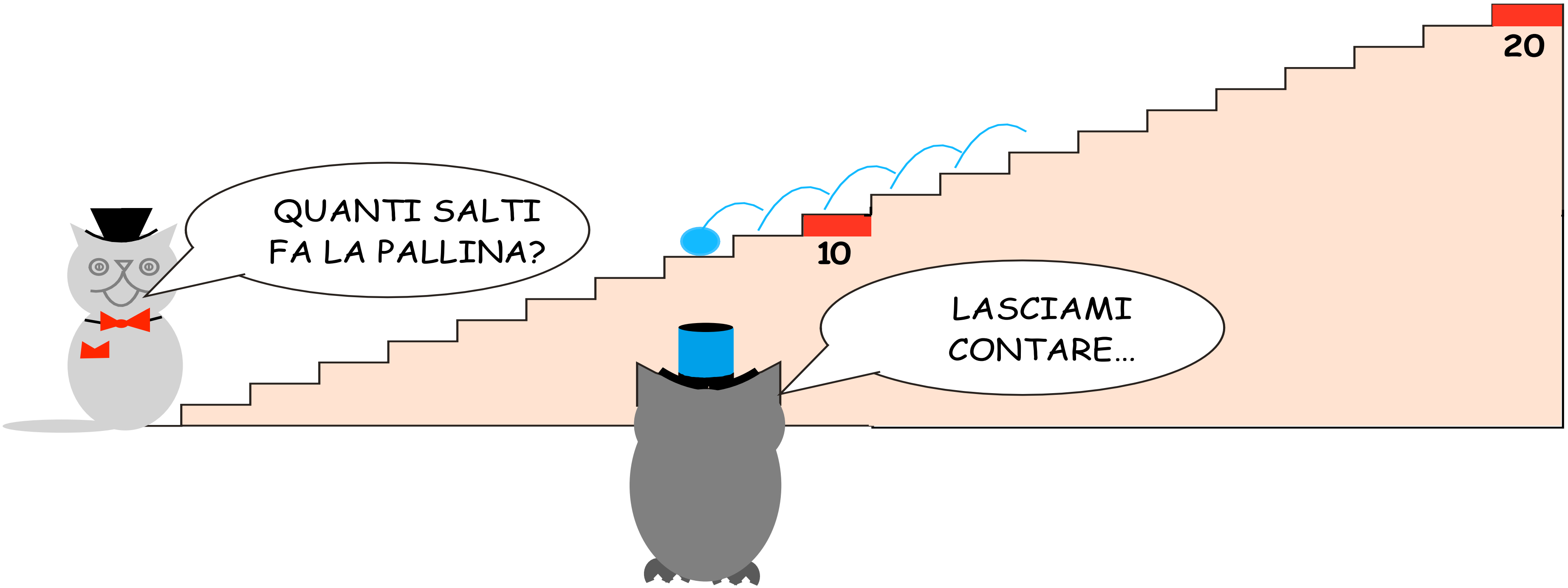
1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 =

- somma dei primi 10 numeri cubi

1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 + 1000 =

Dal più al meno (la sottrazione)

Da quad. I-II



FA SALTELLARE LA PALLINA DALLO SCALINO 13 FINO ALLO SCALINO 8.

IL GUFO CONTA I SALTI. QUANTI SONO? ....

POI ARTURO LANCIA VERSO L'ALTO LA PALLINA CHE DALLO SCALINO 8 SALE FINO ALLO SCALINO 18.
IL GUFO DICE CHE LA PALLINA HA FATTO 11 SALTI.

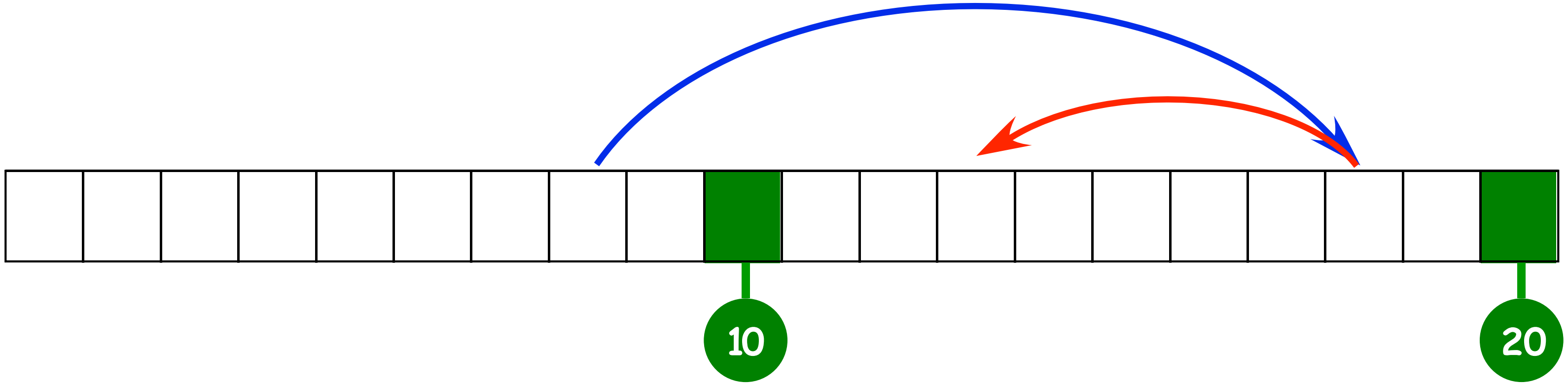
HA RAGIONE? ....

QUANTI NE HA FATTI, SECONDO TE? ....

Il gioco di Genoveffa

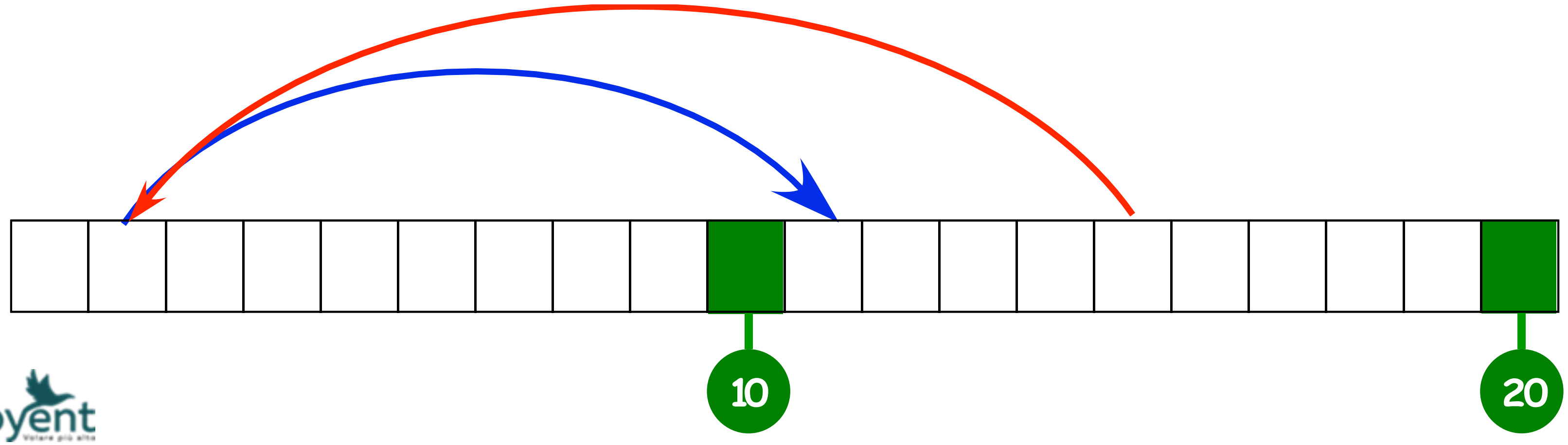
Da quad. I-II

ECCO IL GIOCO. SI PARTE DALLA CASELLA 8, SI AVANZA DI 10 CASELLE (FRECCIA BLU) E POI SI INDIETREGGIA DI 5 CASELLE (FRECCIA ROSSA).



QUESTI DUE SPOSTAMENTI, GENOVEFFA LI SCRIVE COSÌ:
8 + 10 – 5 = 13

ORA TOCCA A TE. COME SCRIVEREBBE GENOVEFFA I DUE SPOSTAMENTI INDICATI DALLA FIGURA SEGUENTE?



Un’altra faccia della sottrazione

GENOVEFFA PROPONE UN NUOVO GIOCO. DEVI TROVARE QUALI NUMERI SONO NASCOSTI DAI FANTASMINI.

5 +  = 8  + 3 = 12 10 +  = 10

SENZA FANTASMINO SI PUÒ SCRIVERE:

8 – 5 = 3 12 – 3 = 9 10 – 0 = 10

SI LEGGE: OTTO MENO 5 UGUALE A TRE, ECC.

ORA PROVA A ESEGUIRE QUESTI CALCOLI

4 +  = 12 CHE SI PUÒ SCRIVERE 12 - 4 = 8

9 – 7 = ………… 14 – 10 = …………

Tecnica della sottrazione

Da quad. III

139 – 25 = (139 – 20) – 5 = 119 – 5 = 114

1 h + 3 da + 9 u – 2 da – 5 u = 1 h + 1 da + 4 u = 114

127 – 34 = (127 – 30) – 4 = 97 – 4 = 93

(1 h + 2 da + 7 u) – 3 da – 4 u = 12 da – 3 da + 3 u =

= 9 da + 3 u = 93

Altro modo di eseguire una sottrazione:

127 – 34 = ?

$$\boxed{34} \xrightarrow{+6} \boxed{40} \xrightarrow{+60} \boxed{100} \xrightarrow{+20} \boxed{120} \xrightarrow{+7} \boxed{127}$$

Quindi: → 127 – 34 = 6 + 60 + 20 + 7 = 93

[Altra possibilità: il metodo "in colonna", vedi quaderno IV-V]

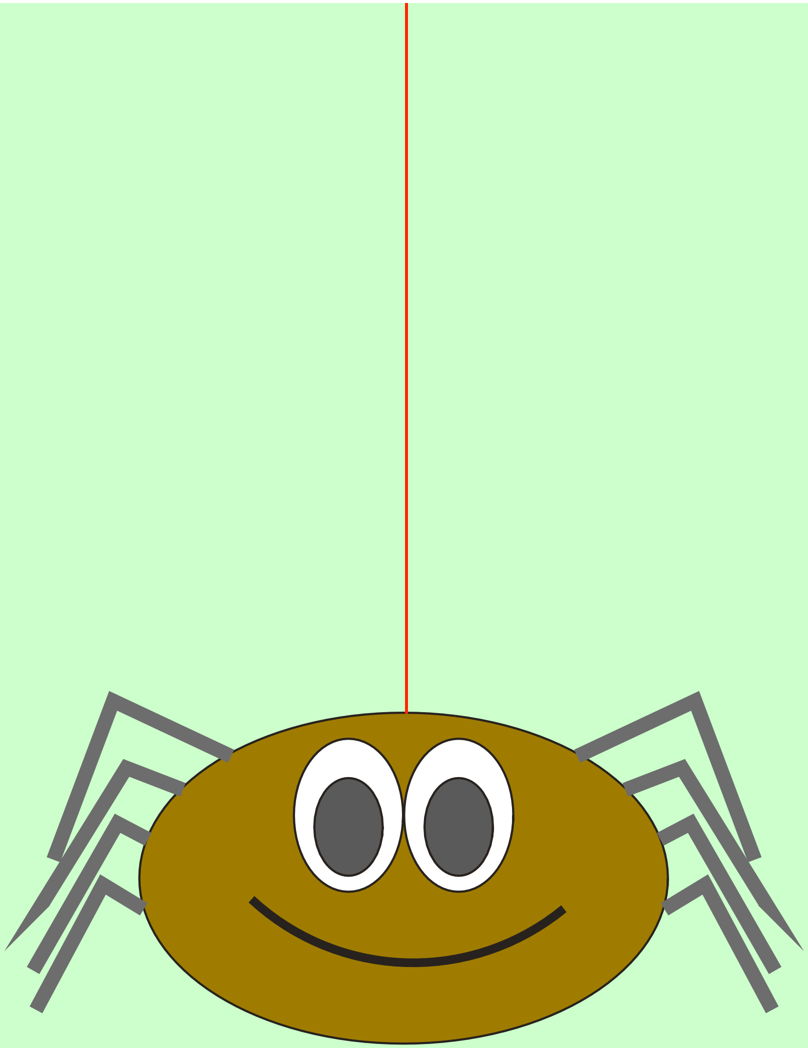
Le operazioni acquistano senso nella realtà!

Da quad. III

Luca possiede 150 figurine di calciatori, delle quali 50 sono doppie e 30 triple.
Quante figurine diverse possiede?

Da una somma di 3200 € vengono prelevati dapprima 1000 € poi due volte 1075 €. Quanto rimane?

Sapyent



ESERCIZIO

SOTTRAZIONE

Esempi

580 – 86 = (580 – 80) – 6 = 500 – 6 = 494

330 – 58 = (330 – 60) + 2 = 2700 + 2 = 272

oppure: esecuzione “dal basso in alto”: 330 – 58 = ?

$$\boxed{58} \xrightarrow{+2} \boxed{60} \xrightarrow{+40} \boxed{100} \xrightarrow{+200} \boxed{300} \xrightarrow{+30} \boxed{330}$$

Dunque: 330 – 58 = 2 + 40 + 200 + 30 = 2 + 270 = 272

Altri esempi

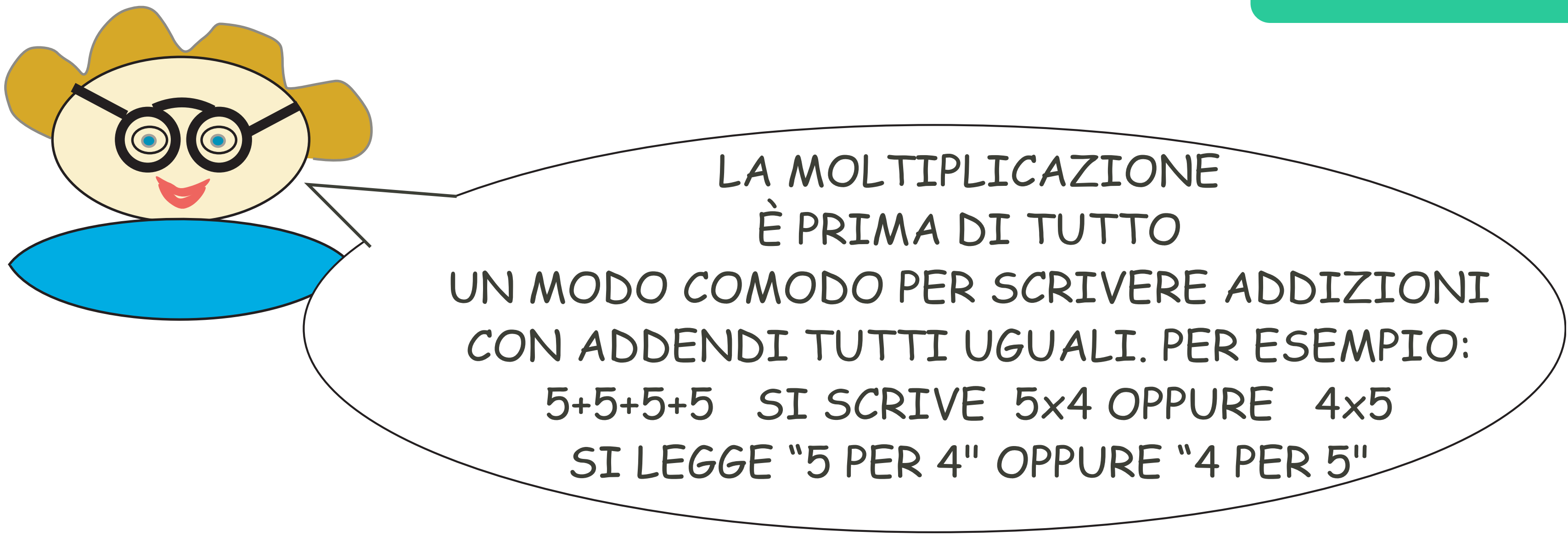
73 – 37 =

543 – 165 =

2500 – 784 =

Dall’addizione alla moltiplicazione

Da quad. III



Capito? Completa la tabella:

INSIEMI	ADDIZIONE	MOLTIPLICAZIONE
6 paia di calze sono	2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 calze	2 x 6 = 12 calze oppure 6 x 2 = 12 calze
5 trii musicali sono	 suonatori	
3 quadrifogli hanno	 foglie	

Dall’addizione alla moltiplicazione

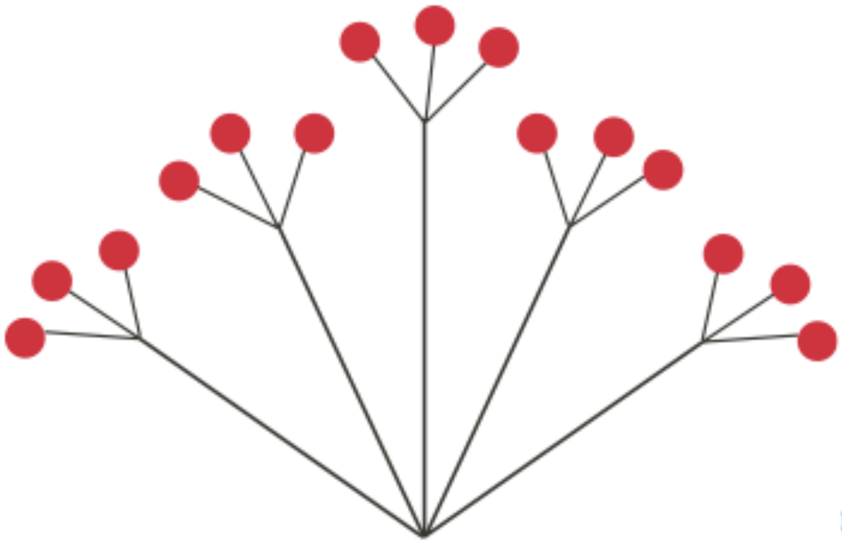
Da quad. III

4 settimane sono	giorni $7+7+7+7 = 28$	$7 \times 4 = 4x7 = 28$
7 biciclette hanno	ruote	

La moltiplicazione

Da quad. I-II

QUANTI CERCHIETTI ROSSI?



SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL +

....

SCRIVI IL CALCOLO USANDO SOLO IL x

....

Da quad. I-II

QUANTI FOGLIETTI?

SCRIVI IL CALCOLO COME PREFERISCI

....

Da quad. III

La tavola pitagorica

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

Sapyent

Le tabelline

Memorizzarle, ma dopo più costruzioni ragionate.

Esempio

Se so che $7 \times 3 = 21$, allora posso facilmente dedurre che $7 \times 4 = 21 + 7 = 28$ e anche $7 \times 2 = 21 - 7 = 14$ (…)

La moltiplicazione oltre le tabelline

$20 \times 40 = 800$; $30 \times 8 = 240$, ecc.

$15 \times 7 = \boxed{(10 + 5) \times 7 = 10 \times 7 + 5 \times 7} = 70 + 35 = 105$

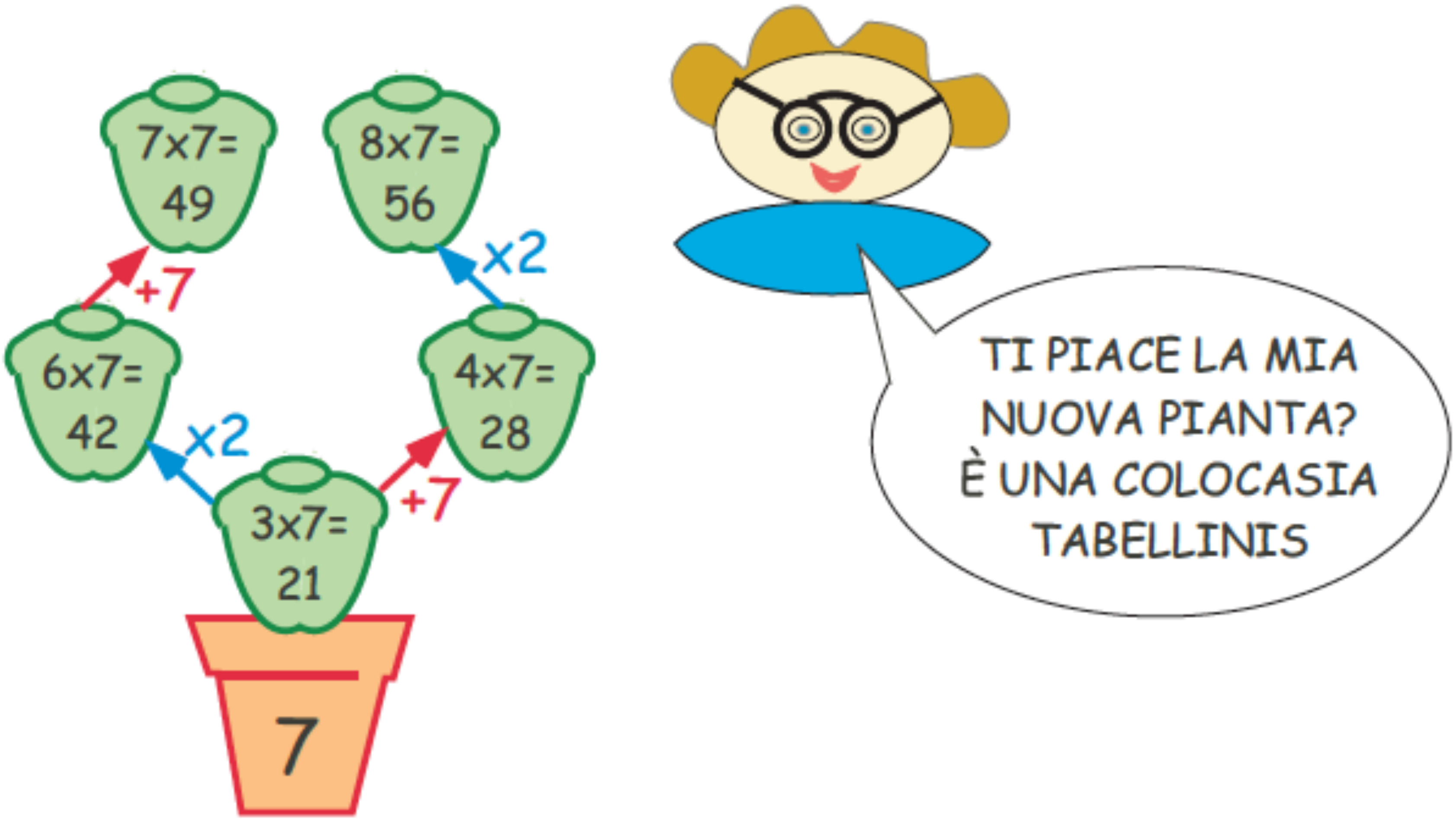
$13 \times 19 = \boxed{13 \times (20 - 1) = 260 - 13} = 247$

(…)

Combinare moltiplicazione con addizione e sottrazione è un gioco divertente e proficuo.

Da quad. III

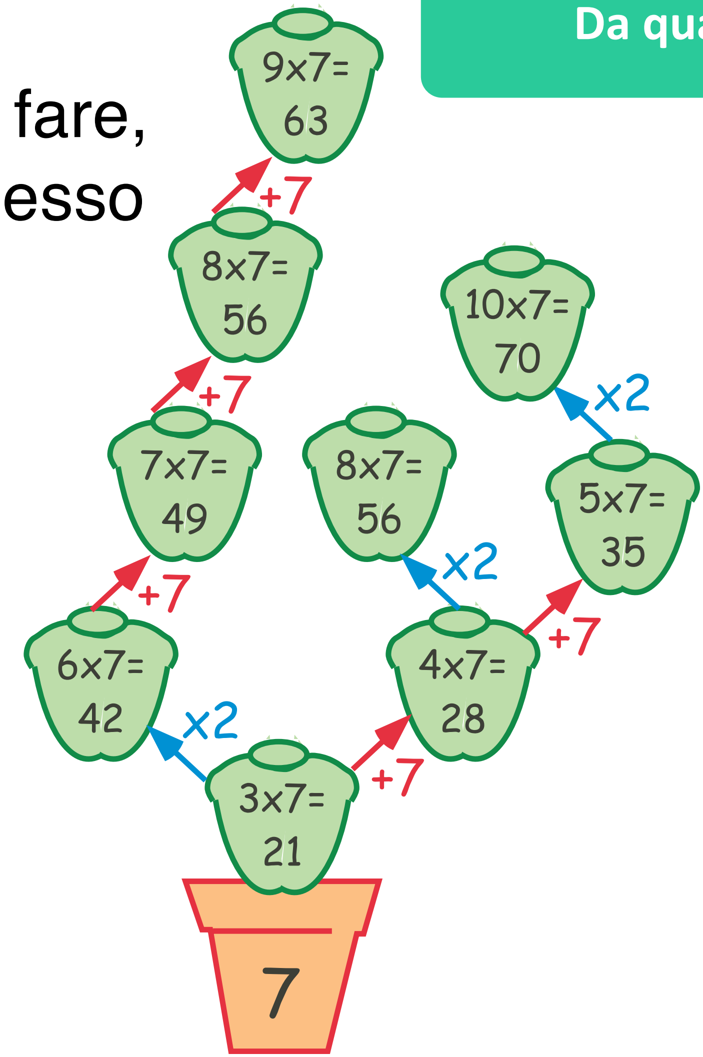
Un gioco per costruire le tabelline



Sapyent

Da quad. III

Ercolino, che coi numeri ci sa fare, ha già capito tutto e si è permesso di farla crescere ancora.
Ecco il risultato.



Tecnica della moltiplicazione

$42 \times 39 = (40 + 2) \times 39 = 40 \times 39 + 2 \times 39 =$

$= (1600 – 40) + (80 – 2) = 1560 + 78 = 1638$

oppure:

$42 \times 39 = 42 \times (40 – 1) = (42 \times 40) – 42 = 1680 – 42 = 1638$

La moltiplicazione in tabella

x	**40**	**2**
30	1200	60
9	360	18

$42 \times 39 = 1200 + 360 + 60 + 18 =$

$= 1560 + 60 + 18 = 1620 + 18 = 1638$

Come dire: la moltiplicazione trasformata in addizione.

Sapyent

La moltiplicazione schematica

$$136 \times 3 = ?$$

$$100 + 30 + 6$$

$$\times 3 \qquad \times 3 \qquad \times 3$$

$$300 + 90 + 18 = 408$$

$$29 \times 37 = ?$$

$$20 + 9 \qquad 30 + 7$$

$$\times 30 \qquad \times 7 \qquad \times 30 \qquad \times 7$$

$$600 + 140 + 270 + 63 =$$

$$= 900 + 40 + 70 + 63 =$$

$$= 900 + 103 + 70 = 1073$$

Sapyent

Moltiplicazione, addizione e sottrazione

NEL NUOVO PARCHEGGIO VI SONO 5 FILE DA 4 POSTI, 3 FILE DA 10 POSTI E 2 FILE DA 9 POSTI: QUANTI POSTI IN TUTTO?

(...)

(1 X 2) + (2 X 3) + (3 X 4) + (4 X 5) = ...

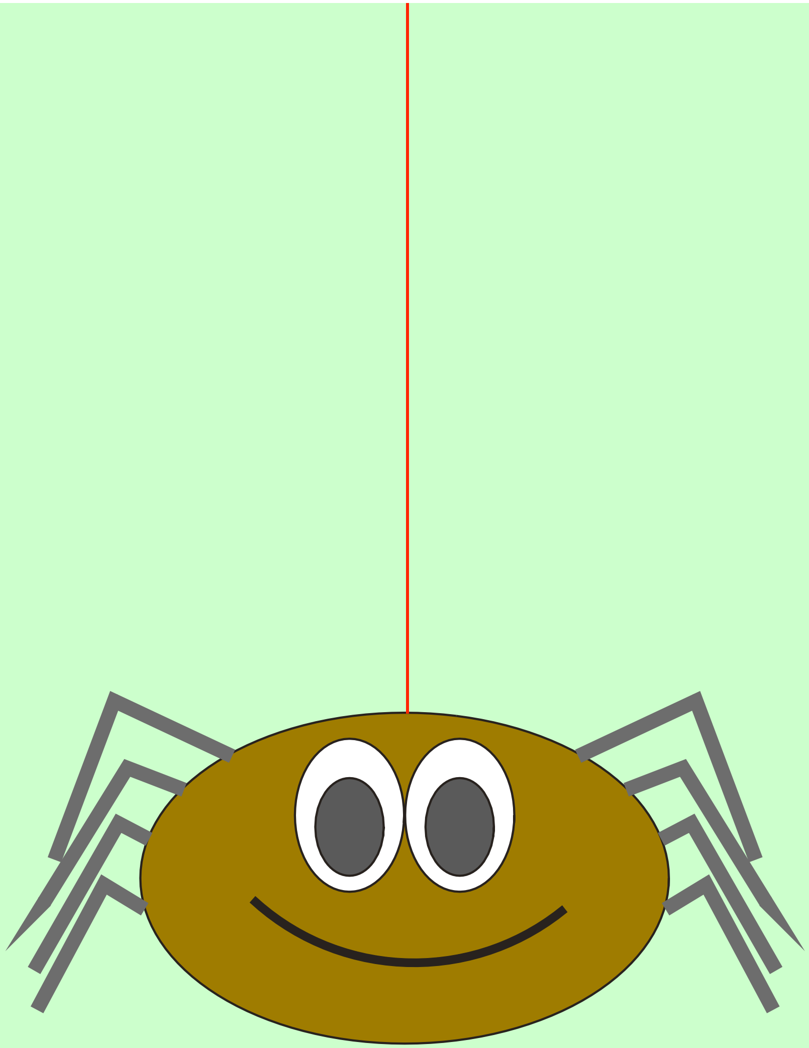
(4 X 10) – (2 X 3 X 4) = ...

(1 X 10) + (2 X 10) + (3 X 10) – (2 X 2 X 2 X 5) =

= ....

(...)

Sapyent



ESERCIZIO

MOLTIPLICAZIONE

Esempi

24 x 7 = (20 + 4) x 7 = 20 x 7 + 4 x 7 = 140 + 28 = 168

35 x 29 = 35 x (30 – 1) = 35 x 30 – 35 = 1050 – 35 = 1015

Con la tabella: 386 x 27 = ?

x	300	80	6
20	6000	1600	120
7	2100	560	42

Eseguiamo le moltiplicazioni nelle caselle
e infine sommiamo tutti i risultati della tabella:
6000 + (2100 + 1600) + (560 + 120) + 42 = 6000 + 3700 + 680 + 42 =
= 9700 + 600 + 80 + 42 = = 10'380 + 42 = 10’422
Dunque: 386 x 27 = 10’422

Altri esempi

58 x 8 =

67 x 7 =

287 x 43 = ?

458 x 67 = ?

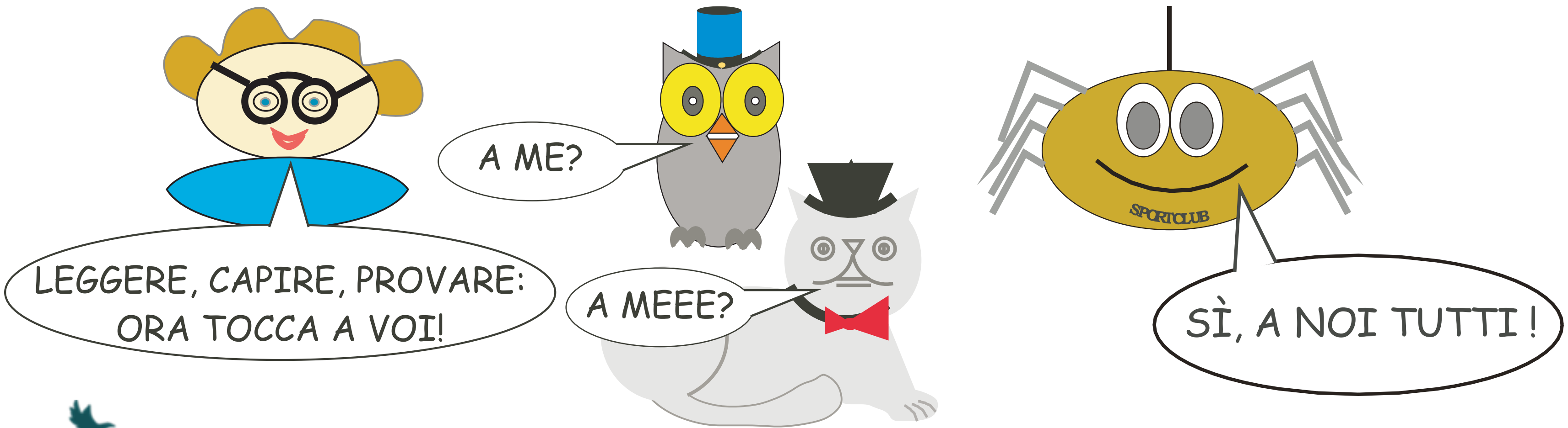
Finalmente… la divisione (il “diviso”)

Così dice Genoveffa

Da quad. III

Scrivi i numeri mancanti:

3 x 7 = ………	……… x 7 = 21	3 x ……… = 21
Fatto? Ora, tu conosci il risultato e uno dei fattori. Come puoi trovare l’altro?	21 : 7 = 3 si legge: “21 **diviso** 7 = 3”	21 : 3 = ……… si legge: “21 **diviso** 3 = 7”



Primi esempi di divisioni

Da quad. III

5 x 4 = ...	20 : 4 = ...	20 : 5 = ...
6 x 8 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
9 x 3 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...
7 x 5 = ...	.... : .... = ...	.... : .... = ...

Esempi di problemi

Un album è composto di 30 fogli.
Quante pagine ha?

Marina vuole incollarvi 27 fotografie mettendone 3 per pagina.
Quante pagine rimarranno vuote?

La divisione oltre la Tavola Pitagorica

Da quad. III

$320 : 40 = 32 : 4 = 8$

$560 : 7 = (56 : 7) \times 10 = 8 \times 10 = 80$

$60 : 4 = (60 : 2) : 2 = 30 : 2 = 15$

$600 : 15 = (600 : 3) : 5 = 200 : 5 = 40$

$54 : 3 = (30 + 24) : 3 = (30 : 3) + (24 : 3) = 10 + 8 = 18$

$117 : 9 = (90 + 27) : 9 = (90 : 9) + (27 : 9) = 10 + 3 = 13$

$192 : 8 = (80 + 80 + 32) : 8 = (80 : 8) + (80 : 8) + (32 : 8) =$

$= 10 + 10 + 4 = 24$

Sapyent

La divisione in N: situazioni non agevoli

845 : 65 = ? Cioè: quante volte il 65 sta in 845?

$$\xrightarrow{65 \times \mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+\, 65 \times \mathbf{3}} 845$$

$845 : 65 = 10 + 3 = 13$

$2632 : 56 = ?$

$$\xrightarrow{56 \times \mathbf{20}} 1120 \xrightarrow{+\, 56 \times \mathbf{20}} 2240 \xrightarrow{+\, 56 \times \mathbf{5}} 2520 \xrightarrow{+\, 56 \times \mathbf{2}} 2632$$

$2632 : 56 = 20 + 20 + 5 + 2 = 47$

Si potrebbe anche operare con 56x**10**. La catena si allunga un po', ma il calcolo risulta più facile.

[Altro modo: la divisione "in colonna", parecchio difficile, vedi quaderno di IV-V]

Sapyent

La divisione in N con resto

823 : 9 = (810 + 13) : 9 = 810 : 9 + 13 : 9 = 90 + (9 + 4): 9 =
= 90 + 9 : 9 + 4 : 9 = 91 + 4 : 9 (oppure 91 con resto 4; 91 R4)

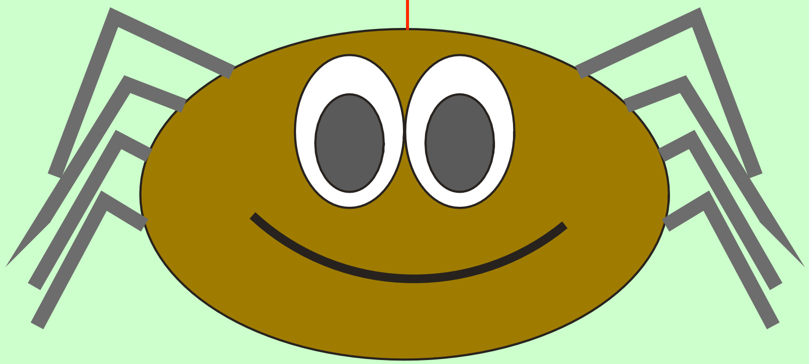
871 : 65 = ?

$$\xrightarrow{65\ \times\ \mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+\ 65\ \times\ \mathbf{3}} 845$$

$$871 - 845 = 26 < 65$$

871 : 65 = 10 + 3 + 26 : 65 = 13 + 26 : 65

oppure = 13 con resto 26 (13 R 26)



ESERCIZIO

DIVISIONE

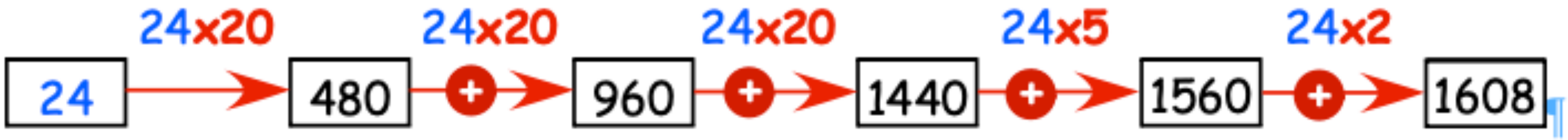
Esempi

63 : 7 = 9 (dalle tabelline)

91 : 7 = (70 + 21) : 7 = (70 : 7) + (21 : 7) = 10 + 3 = 13

720 : 80 =

Esecuzione con la catena di operatori. 1608 : 24 = ?



Dunque: 1608 : 24 = 20 + 20 + 20 + 5 + 2 = 67

Altri esempi

117 : 9 =

6400 : 80 =

258 : 43 =

Composizioni di operatori (esempi)

$$\xrightarrow{\times 2} \; \xrightarrow{\times 2} \; = \; \xrightarrow{\times 4}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \; \xrightarrow{\times 3} \; = \; \xrightarrow{\times 6}$$

$$\xrightarrow{\times 10} \; \xrightarrow{\times 10} \; = \; \xrightarrow{\times 100}$$

$$\xrightarrow{:3} \; \xrightarrow{:5} \; = \; \xrightarrow{:15}$$

$$\xrightarrow{:10} \; \xrightarrow{:10} \; = \; \xrightarrow{:100}$$

$$\xrightarrow{:10} \; \xrightarrow{\times 2} \; = \; \xrightarrow{:5}$$

Ecc.

E con i numeri decimali, come facciamo?

Da quad. IV-V

Ogni calcolo è riconducibile a uno con numeri interi.

0,05 + 0,3 = 5 c + 30 c = 35 c	0,12 + 3,5 = 12 c + 350 c = 362 c = 3,62
0,7 – 0,5 = 7 d – 5 d = 2 d = 0,2	0,7– 0,38 = 70 c – 38 c = 32 c = 0,32
0,2 x 0,3 = 2 d x 3 d = 6 c = 0,06	0,7 x 0,26 = 7 d x 26 c = 182 m = 0,182
0,12 : 0,04 = 12 c : 4 c = 12 : 4 = 3	1,25 : 0,005 = 1250 m : 5 m = 1250 : 5 = 250

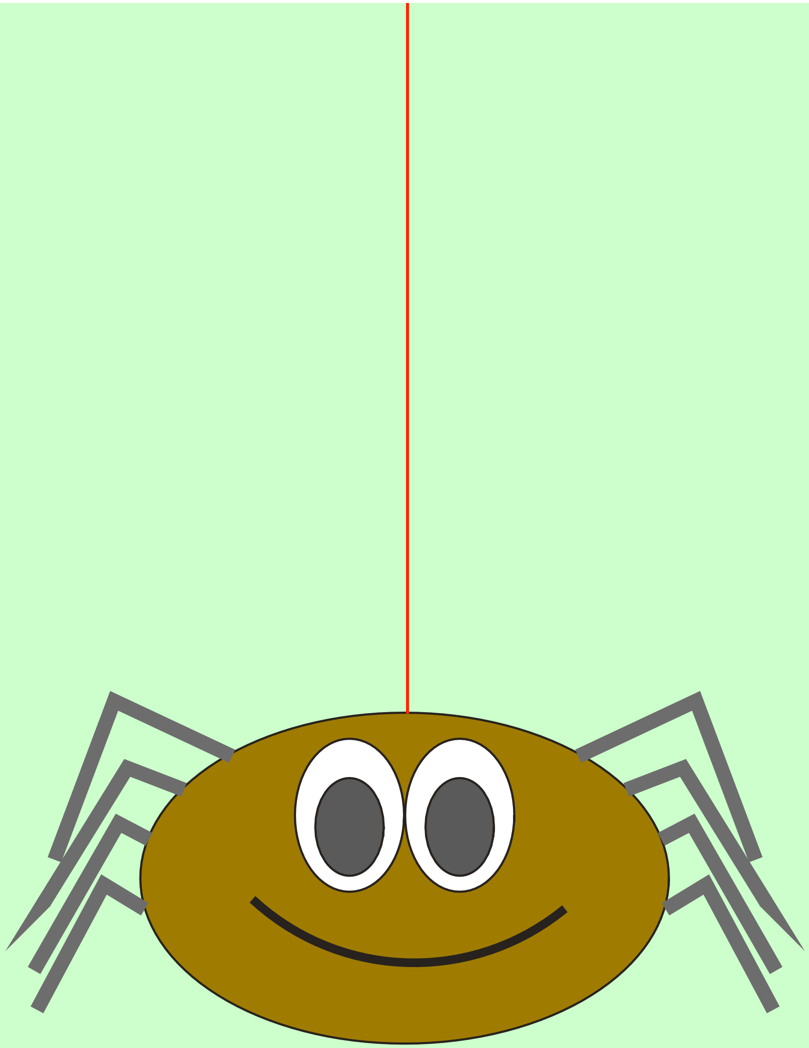
Test di autovalutazione (esempio)

Da quad. IV-V

Scegli i risultati corretti nella tabella a destra e riporta ordinatamente le sillabe corrispondenti nei rettangolini verdi che trovi alla fine. Che frase apparirà?

53 x 8 =	64	424	224	448
	MO	I	CA	NO
453 + 227 =	680	700	670	880
	CAL	ZON	CI	NI
840 : 24 =	25	45	50	35
	AN	TAR	TI	CO
406 − (125 + 91) =	372	211	189	190
	GIO	CAT	TO	LI

I	CAL	CO	LI	NON	HAN	NO	PIÙ	SE	GRE	TI	



ESERCIZIO

OPERAZIONI CON I DECIMALI

Esempi

0,05 + 0,3 = 5 c + 30 c = 35 c = 0,35 (si riducono i termini alla stessa unità e si torna alla forma decimale)

0,7– 0,38 = 70 c – 38 c = 32 c = 0,32 (si riducono i termini alla stessa unità e si torna alla forma decimale))

0,7 x 0,26 = 7 d x 26 c = 182 m = 0,182 (si deve sapere che dxd=c, dxc=m)

15 : 0,03 = 1500 c : 3 c = 1500 : 3 = 500 (si riducono i termini alla stessa unità e si ottiene automaticamente la forma decimale)

Altri esempi

0,35 + 0,65 =

0,7 – 0,007 =

1,2 x 0,05 =

0,56 : 0,008 =

La calcolatrice nella scuola

Premessa

L'insegnamento del calcolo ragionato ha due obiettivi principali:

- La competenza nel **calcolo mentale** e nel **linguaggio algebrico-numerico** (competenze pre-algebriche: generare e calcolare **espressioni numeriche**).
- La capacità di eseguire calcoli approssimati, per esempio stime di risultati.

I calcoli disagevoli (difficili, complessi) si eseguono con la calcolatrice, MA…

Sapyent

Usiamo correttamente la calcolatrice

Già nella scuola primaria è necessario educare l'alunno all'uso corretto dello strumento elettronico (calcolatrice o computer).

Tre consigli preziosi sull'uso in classe della calcolatrice:

Mai impostare un calcolo senza avere un'idea, una previsione, una stima del risultato che si vuole raggiungere.

Quando è possibile, un algoritmo risolutivo deve essere eseguito a macchina senza ricopiare risultati parziali su un foglio e ogni dato dev'essere introdotto una sola volta.

Ogni risultato ottenuto a macchina dev'essere confrontato con la stima effettuata e interpretato nel contesto del problema.

Ecco Bice, la calcolatrice

Da quad. IV-V

Una ripartizione difficile

Tre amiche hanno vuotato i loro salvadanai. Il ricavato lo suddividono in 7 parti uguali da versare a enti benefici.
I ricavi, in euro, sono stati i seguenti:
323,80 ; **241,25** ; **273,15**
A quanto ammonta l'importo di ciascuna delle 7 parti?

Calcolo: (……………… + ……………… + ………………) : ……

Esempio di stima del risultato: (320 + 240 + 280) : 7 = …………………

Programma: (▭ + ▭ + ▭) ÷ ▭ = **119.74285**

Risposta: 119,70 ? 119,75 ? 120 ? Sì, ma…

Sapyent


Calcolo
mentale
Educazione
pre-algebrica
Calcolo
ragionato
Calcolo
approssimato
e
strumentale
Piacere
di affrontare
un calcolo
Relativizza-
zione del
calcolo
in colonna

Problem solving

- **abitudine ad affrontare i problemi**

- **confrontarsi con problemi nuovi (con più soluzioni, impossibili, con dati insufficienti o sovrabbondanti)**

- **abitudine a procedere per tentativi**

- **sviluppo delle capacità intuitive e creative**

- **abitudine a mettersi in gioco, piacere nel riuscire, gusto del rilancio.**

Sapyent

Due anime della matematica

Risoluzione di problemi

Matematica

Euclide (III sec. a.C.)
Hilbert (IXX-XX secolo)
Peano (idem)
Dedekind (idem)
Bourbaki (XX secolo)
Gödel (1931: teorema di incompletezza)
(…)

Bernoulli Johann & Jakob (XVII-XVIII secolo)
[“indivisibili”y, XVII secolo]
Euler (XVIII secolo)
Gauss (XIX secolo)
(…)

Costruzione e sistemazione di teorie

Due facce dell'apprendere

Apprendimento strategico

Sviluppo del pensiero divergente (intuizione, creatività)
Socializzazione dell'apprendimento (apprezzamento delle idee altrui, confronto razionale)
Fiducia in se stessi
Interesse per l'attività matematica

Didattica

Acquisizione di concetti e procedimenti
Organizzazione delle conoscenze
Differenziazione
Autovalutazione

Apprendimento concettuale

Sapyent

Il problema in matematica

Che cos’è un (vero) problema

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un’attività istintiva o attraverso un comportamento appreso.

Kanizsa G. (1973). Il «problem solving» nella psicologia della Gestalt. In: Mosconi G., D’Urso V. (a cura di). *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera, p. 35.

Gli altri “problemi”, in particolare quelli più diffusi di applicazione di conoscenze note, li chiamiamo “esercizi”.

Sapyent

Acquisire fiducia in se stessi

di fronte a un problema nuovo…

… siamo tutti ai piedi della scala

tentiamo per gioco…

ogni tentativo ha valore…

… anche se errato, anche se poco utile

anche il più piccolo passo verso la meta…

è fonte di soddisfazione.

… s’impara a confutare razionalmente

s’impara a formulare congetture

… si esprimono le proprie idee giustificandole

… s’impara ad ascoltare

… s’impara a lavorare insieme
in piccoli gruppi…

Interagire
con i propri
compagni

Esempi

Un regalo per Genoveffa

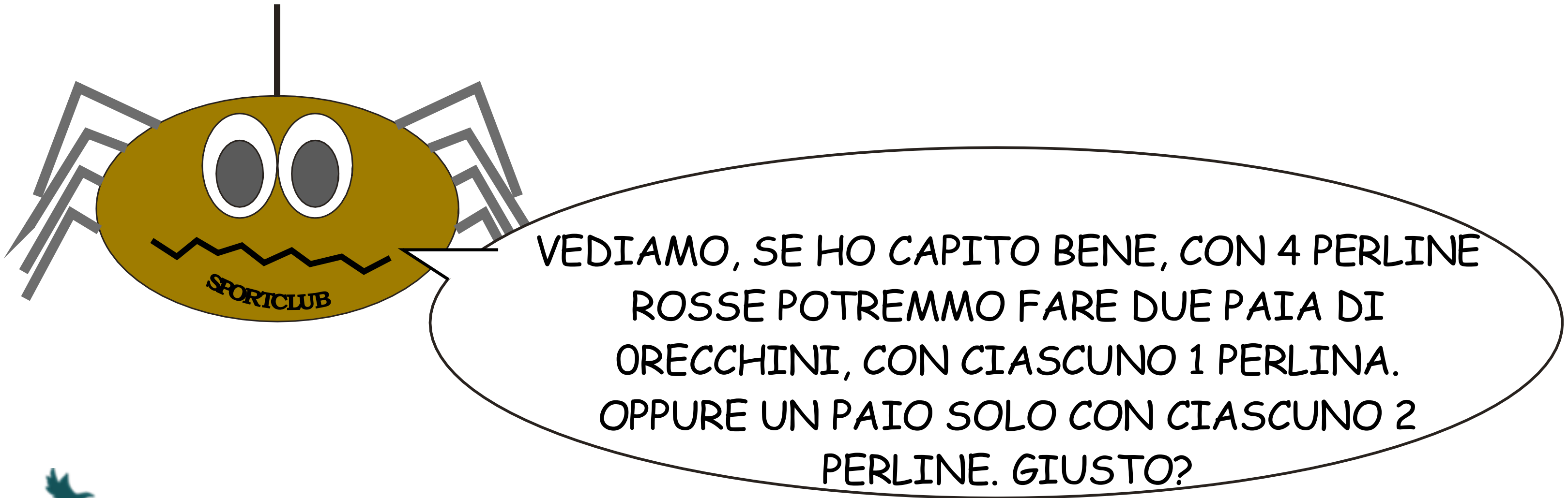
Da quad. III

Arturo, Filiberto ed Ercolino vogliono realizzare degli orecchini per il compleanno di Genoveffa.

Hanno 4 perline rosse, 12 perline verdi e 48 perline gialle.

Due orecchini che formano un paio devono avere lo stesso numero di perline e lo stesso colore.

Quali possibilità hanno di confezionare le paia di orecchini?



Sapyent

Un regalo per Genoveffa

Da quad. III

Per cercare tutte
le possibilità,
ti puoi servire
della tabella che
è da completare.

COLORE	NR. PERLE	NR. PERLE PER OREC.	NR. PAIA DI OREC.
ROSSO	4	1	2
		2	1
VERDE	12	**1**	**6**
		2	**3**
		3	**2**
		6	**1**
GIALLO	48		

A VOI...

Sapyent

I quadrati di Filiberto

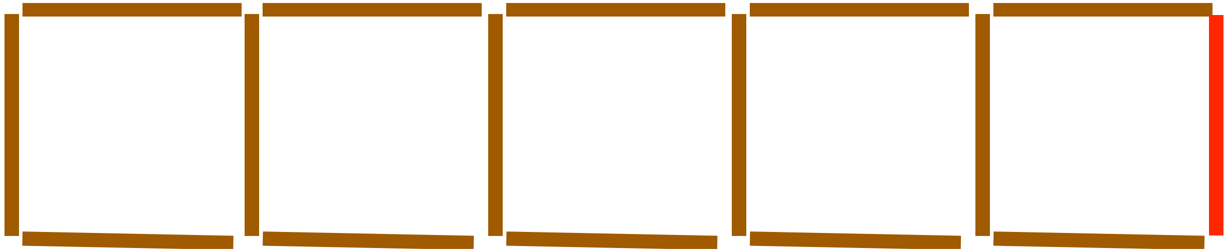
Da quad. III

I quadrati di Filiberto

Anche il gufo Filiberto ha inventato un gioco che può diventare sempre più grande. Usa bastoncini uguali fra loro. Ecco il gioco di Filiberto:

Quanti bastoncini?

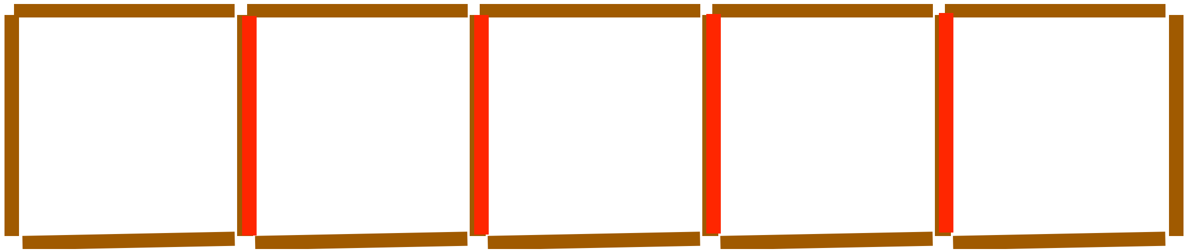
Alcuni modi per contare:



$Q_5 \quad 3 \cdot 5 + 1 = 16$

$Q_{50} \quad 3 \cdot 50 + 1 = 151$

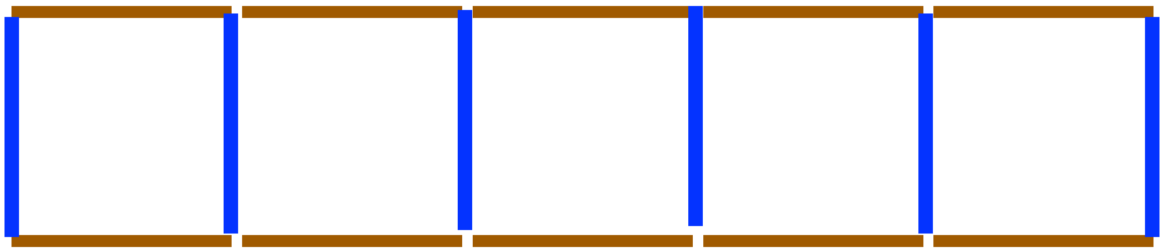
$Q_N \quad 3 \cdot N + 1$



$Q_5 \quad 4 \cdot 5 - 4 = 16$

$Q_{50} \quad 4 \cdot 50 - 49 = 151$

$Q_N \quad 4 \cdot N - (N-1)$



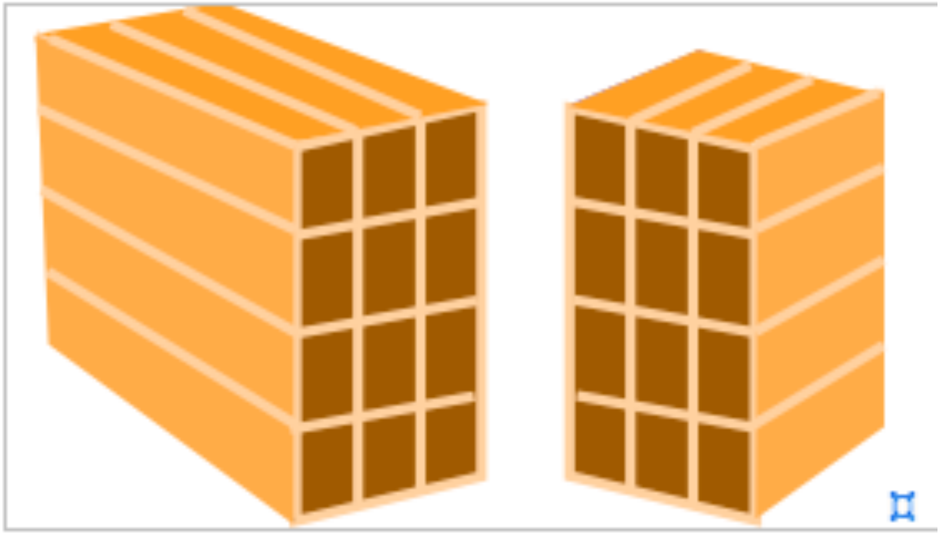
$Q_5 \quad 5 \cdot 2 + 6 = 16$

$Q_{50} \quad 50 \cdot 2 + 51 = 151$

$Q_N \quad N \cdot 2 + (N+1)$

Il rompicapo del mattone

Da quad. IV-V



Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone.

Sì, ma quanto pesa in kg un mattone?

A VOI...

Sapyent

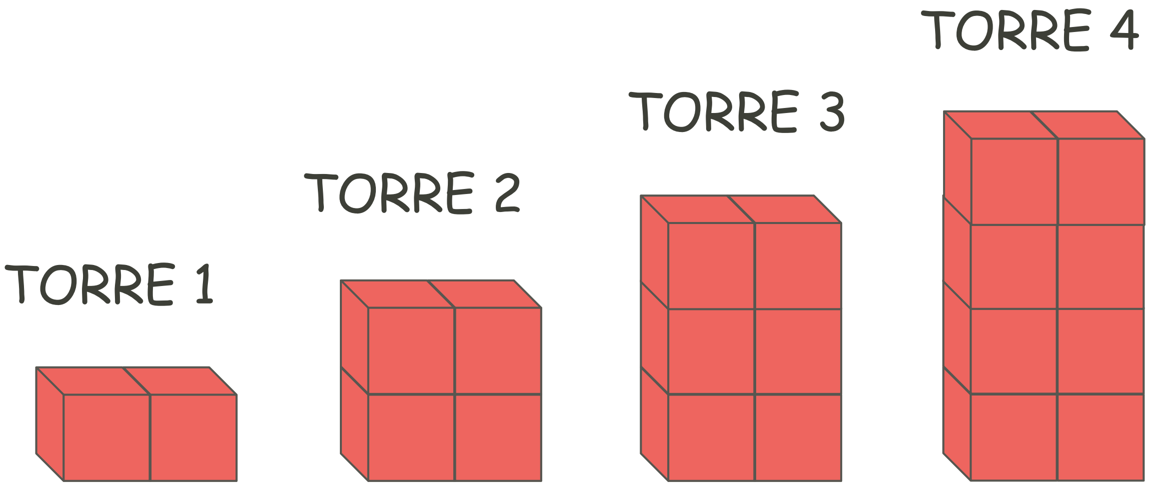
Torri di cubetti: presentazione alla classe

Ai bimbi. Mettere a disposizione le 4 torri già costruite, oppure una scatola di cubetti (tutti uguali fra loro) e far costruire le torri disegnate (o descritte a parole).

Ai ragazzini. Dare la figura della dia e stimolarli a riflettere sulla continuazione della successione. In caso di difficoltà, mettere a disposizione i cubetti.

A studenti più maturi. Dare solo la figura della dia precedente e spingerli direttamente a generalizzare (TORRE n).

Torri di cubetti



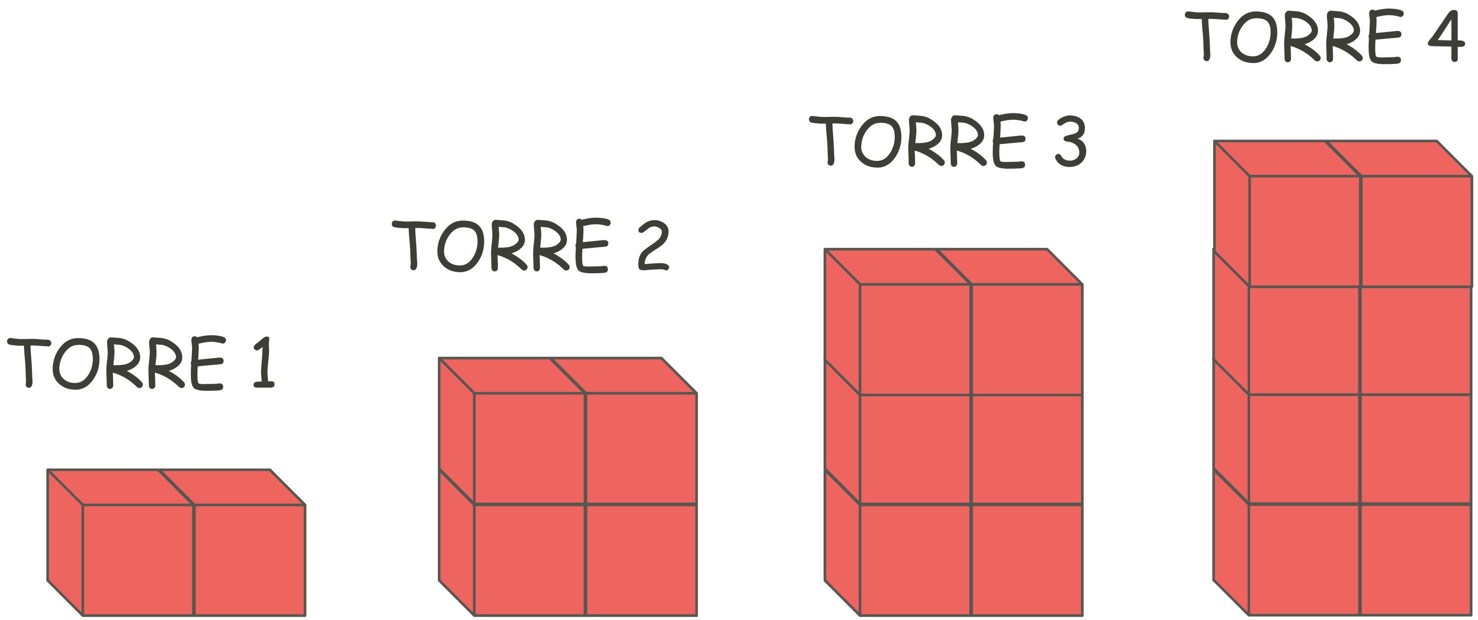
Domande possibili

Di quanti cubetti si compone ogni torre?

Disegna (o costruisci) la TORRE 5. Di quanti cubetti si compone?

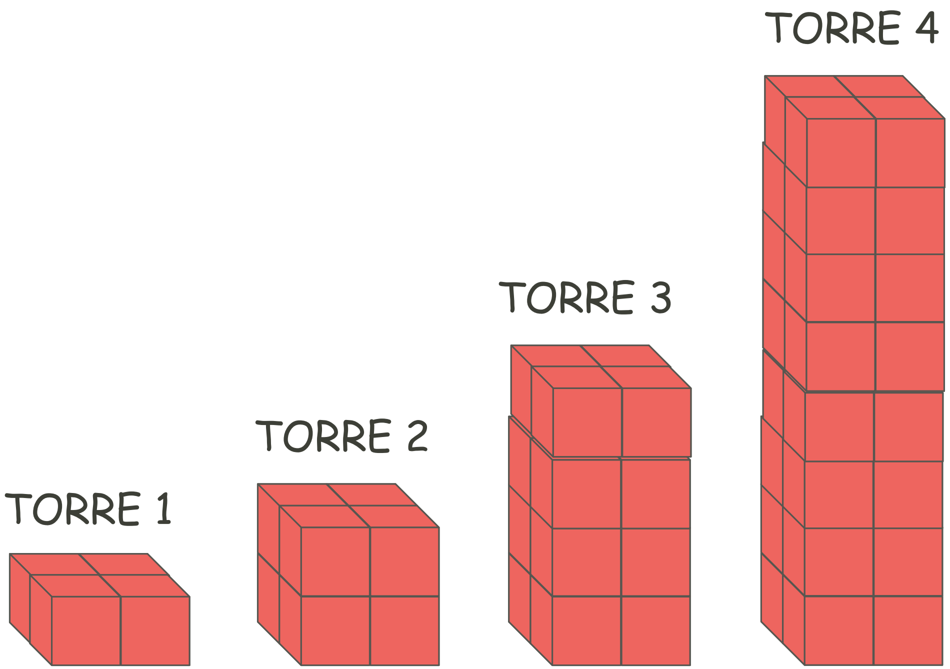
Di quanti cubetti si compone una TORRE 6? una TORRE 10? Una TORRE 100? Una TORRE n?

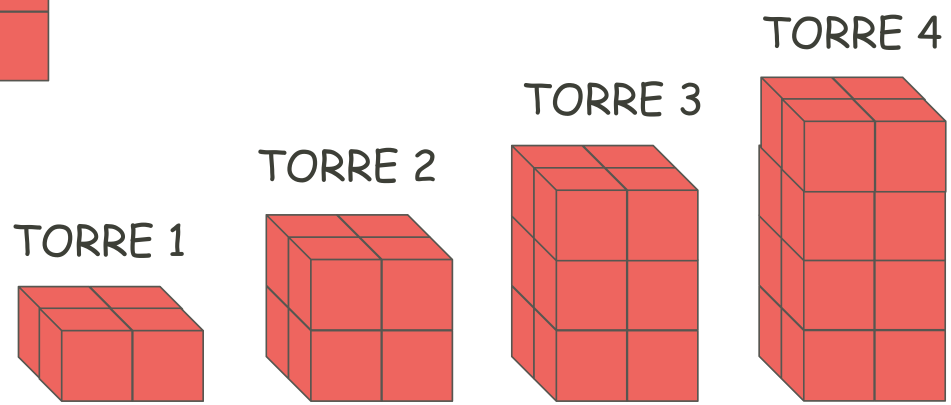
Torri di cubetti: soluzione



TORRI	1	2	3	4	5	6	10	100	n
cubetti	2	4	6	8	10	12	20	200	2 n

Torri di cubetti: rilanci possibili

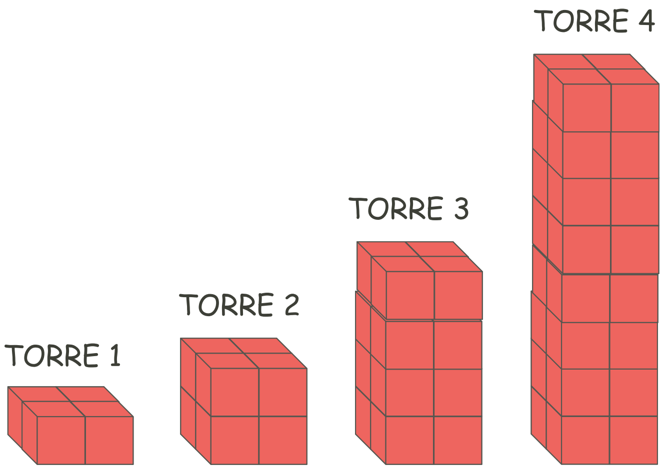




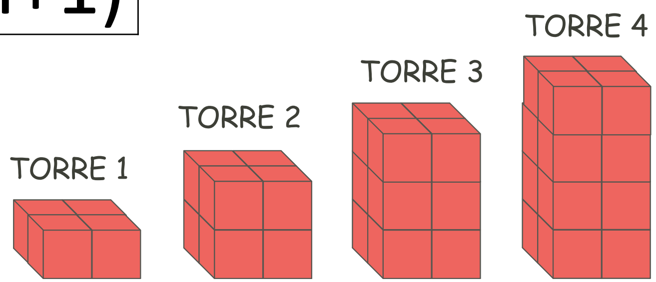
Domande possibili

Di quanti cubetti si compone una TORRE 5? una TORRE 10? Una TORRE n?

Torri di cubetti: soluzioni

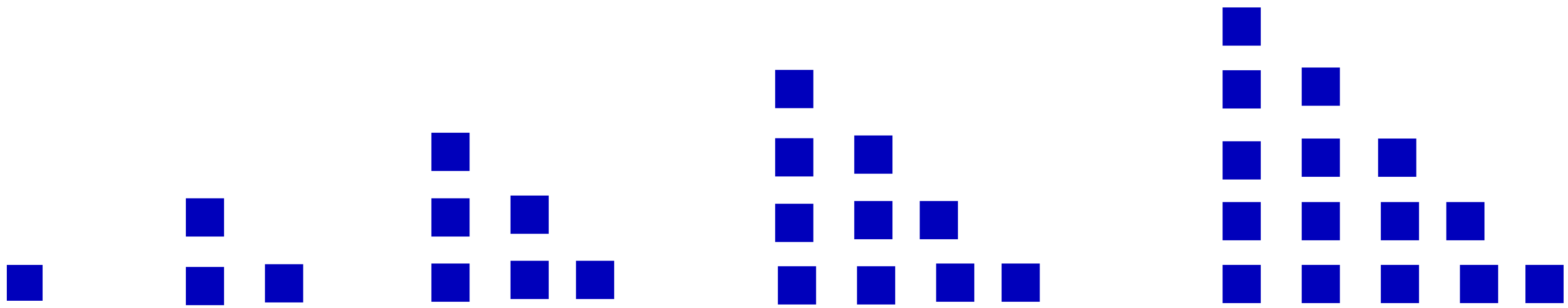


TORRI	5	10	n
cubetti	64	2048	2^(n+1)



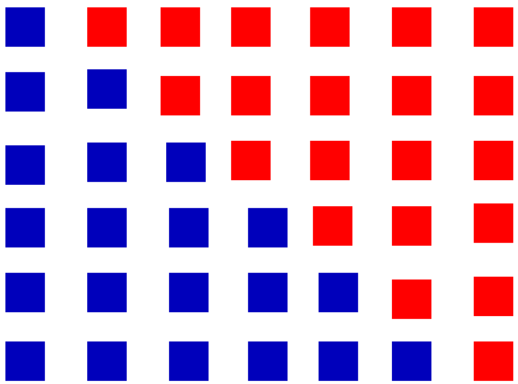
TORRI	5	10	n
cubetti	20	40	4 n

Numeri triangolari



1 3=1+2 6=1+2+3 10=1+2+3+4 15=1+2+3+4+5

1+2+3+4+5+6 = ?



Il suo doppio è il numero rettangolare:

$6 \cdot 7 = 42$

Il VI numero triangolare è quindi

$(6 \cdot 7) : 2 = 21$

Generalizzazione: 1+2+3+…+n = n (n+1) / 2

Piramidi di sfere

Da quad. IV-V

Ecco una piramide quadrangolare di 6 piani:

Puoi provare a costruirne qualcuna anche tu, per esempio con palline da tennis, anche più bassa di quella rappresentata sopra.

Hai fatto qualche costruzione? (Potresti usare anche arance, mandarini o altri oggetti di forma sferica.)

Da quad. IV-V

Piramidi di sfere

Ora proviamo insieme a calcolare il numero di palline necessarie.
Ecco una tabella che ti invitiamo a completare:

strati	calcolo	totale
1	1	1
2	1+4	5
3	1+4+9	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10	1+4+9+16+25+36+49+64+81+100	

Sapyent

Piramidi di sfere

Da quad. IV-V

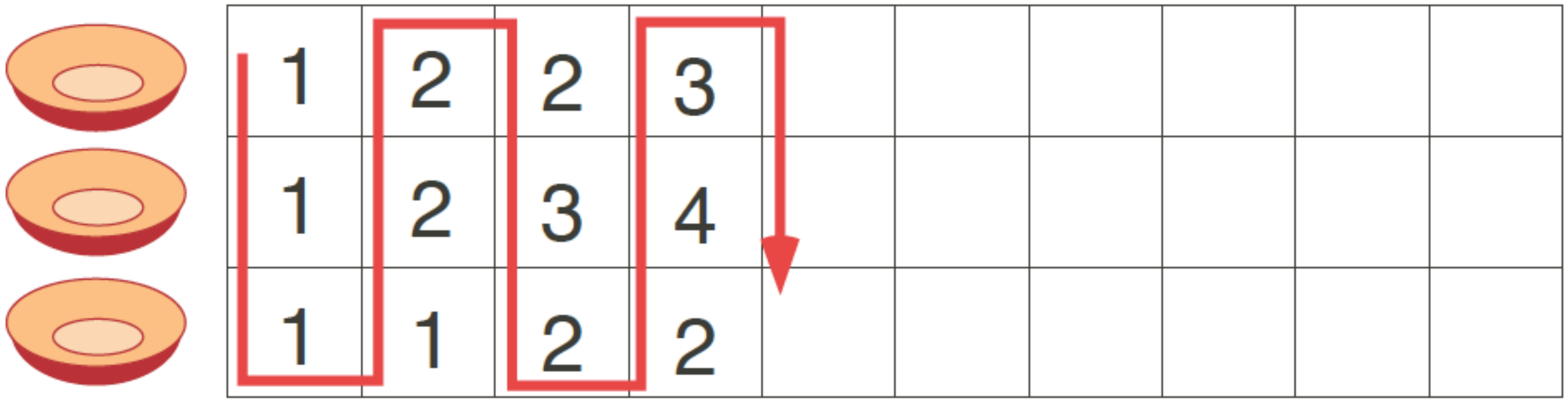
Con le sfere si possono costruire pure piramidi triangolari.
Eccone una fotografata di fronte e dall'alto.

Disegna una tabella come quella delle piramidi quadrangolari.
Le palline da tennis si vendono in scatole da 15 l'una.
Quante scatole occorre comperare al minimo per costruire una piramide triangolare di 9 piani?
E una di 10 piani?

A VOI...

Sapyent

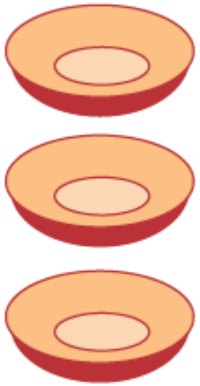
Distribuzione di cioccolatini



Gianni ha un sacchetto pieno di cioccolatini. Li vuole distribuire in tre cestini in questo modo: inizia a mettere un cioccolatino nel primo cestino in alto e poi compie un percorso «giù-su» come indicato dalla linea rossa.

Ogni volta che incontra un cestino, vi mette un cioccolatino.

Distribuzione di cioccolatini



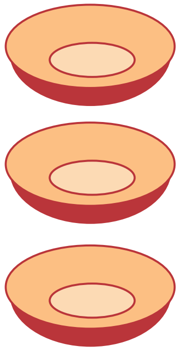
1	2	2	3						
1	2	3	4						
1	1	2	2						

Domande possibili

- Completa la tabella. Che cosa rappresentano i tre numeri dell'ultima colonna?
- Quanti cioccolatini distribuirebbe Gianni se facesse 10 «giù-su»?
- Se avesse distribuito 101 cioccolatini, quanti «giù-su» avrebbe effettuato?

A VOI…

Distribuzione di cioccolatini: soluzione



1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Dopo 10 «giù-su»:

11
20
10

Dopo n «giù-su»:

n+1
2n
n

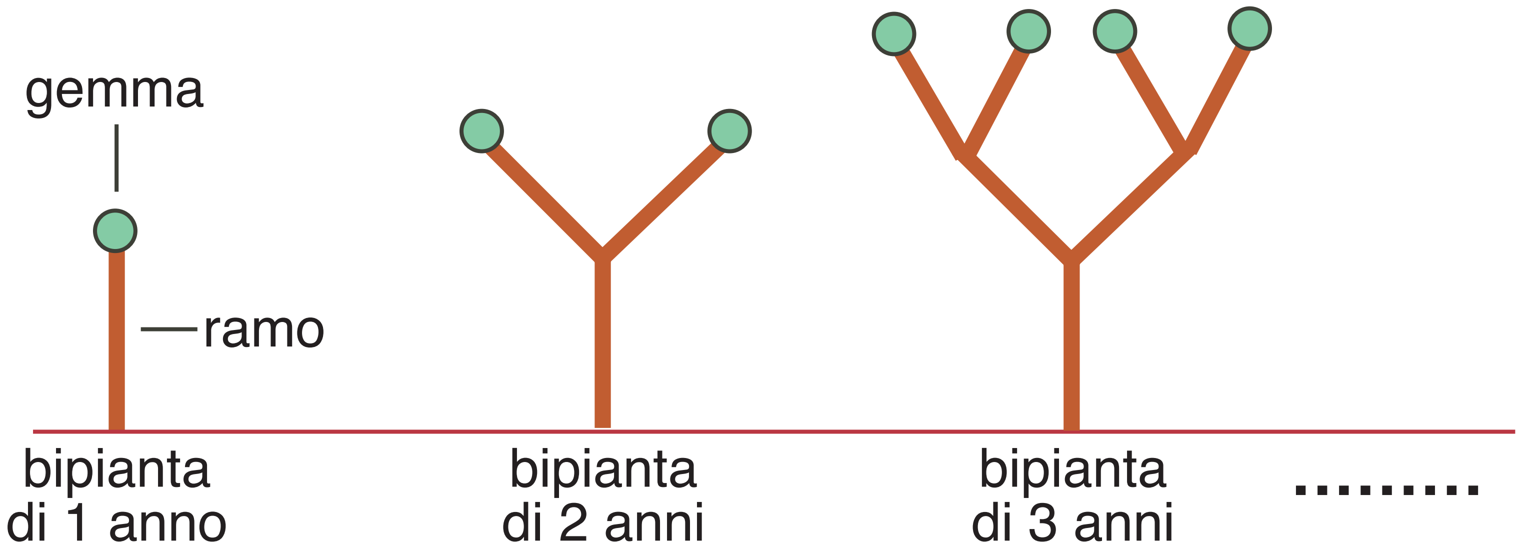
Terza domanda: risoluzione per tentativi:

30+60+31=121 NO 20+40+21=81 NO 25+50+26=101 SÌ

Risposta: 25 “giù-su”.

Risoluzione algebrica: $n+2n+n+1=101$ $4n=100$ $n=25$

Le bipiante



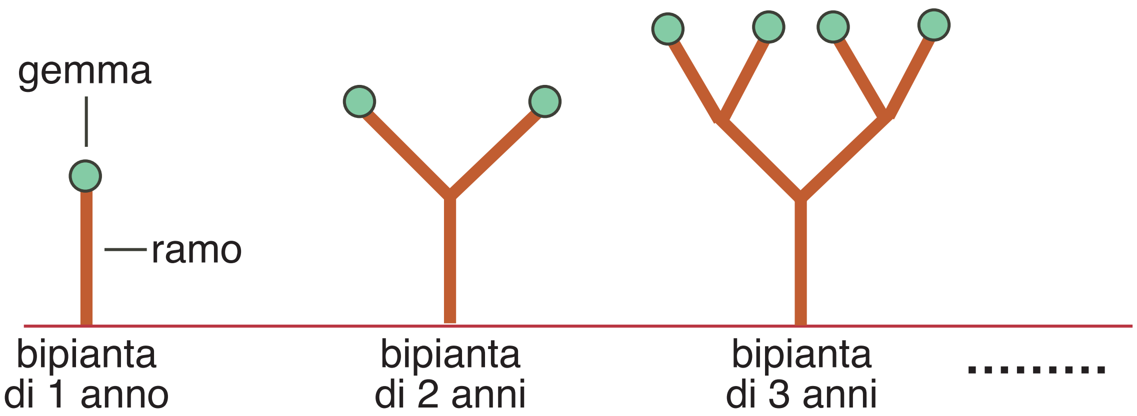
Domande possibili

Prova a disegnare una bipianta di 4 anni e una di 5 anni e conta i rami e le gemme.

Riusciresti a disegnare una bipianta di 10 anni?

Riusciresti a calcolare quanti rami e quante gemme ha una bipianta di 10 anni? e di una di n anni?

Le bipiante: soluzione



anni	rami	gemme
1	1	1
2	$1+2=3$	2
3	$1+2+4=7$	$2^2=4$
4	$1+2+4+8=15$	$2^3=8$
5	$1+2+4+8+16=31$	$2^4=16$
10	$1+2+4+8+16+32+64+128+256+572=1023$	$2^9=572$
…	…	…
n	$1+2+4+\ldots+2^{n-1}= 2^n-1$	2^{n-1}

Le monetine dell'euro

Da quad. IV-V

2	1	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
3	2	0	1	0	1	0	1

La striscia gialla indica la somma 8,26 euro.

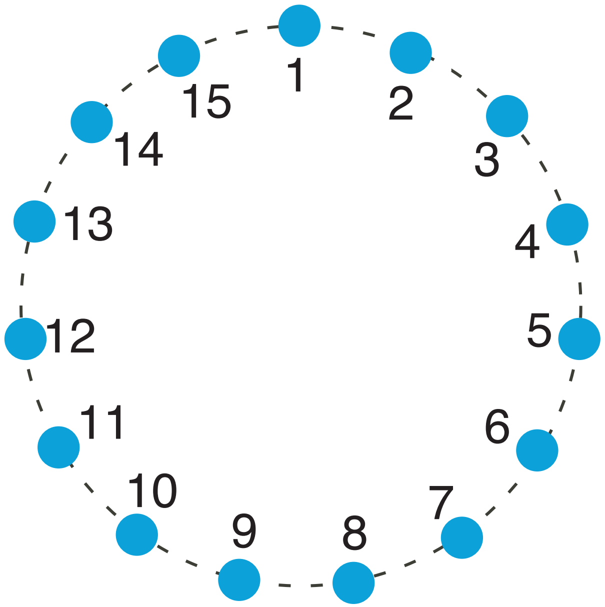
Qual è la massima somma che si può così determinare usando solo le cifre 0 oppure 1?

Costruisci una striscia qualunque usando solo le cifre 0 oppure 1.
Poi costruiscine un'altra, cambiando nella precedente ogni 0 in 1 e ogni 1 in 0.
Ogni striscia determina un insieme di monetine.
Quale somma ottieni addizionando le due appena ottenute?

A VOI...

Un modo di distribuire cioccolatini

Da fascicolo estate IV



Marisa vuole distribuire ai suoi amici i cioccolatini che tiene in un sacchetto.

Dispone in cerchio gli amici e li fa numerare da 1 a 15, come mostra la figura.

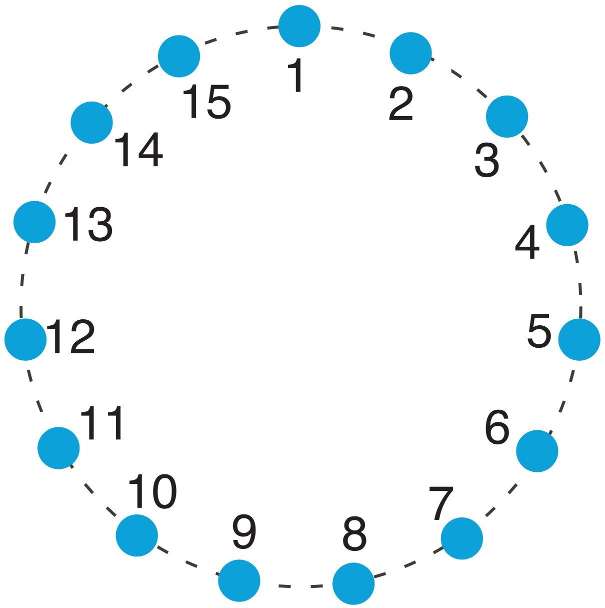
Procede quindi alla distribuzione così:

- compie un primo giro e dà a ciascuno un cioccolatino;
- compie un secondo giro e dà un cioccolatino agli amici che occupano un posto pari;
- compie un terzo giro e dà un cioccolatino agli amici che occupano un posto divisibile per 3;
- continua così fino al quindicesimo giro nel quale dà un cioccolatino a ogni amico che occupa un posto divisibile per 15.

Alla fine non le resta nemmeno un cioccolatino per sé.

Sapyent

Un altro modo di distribuire cioccolatini



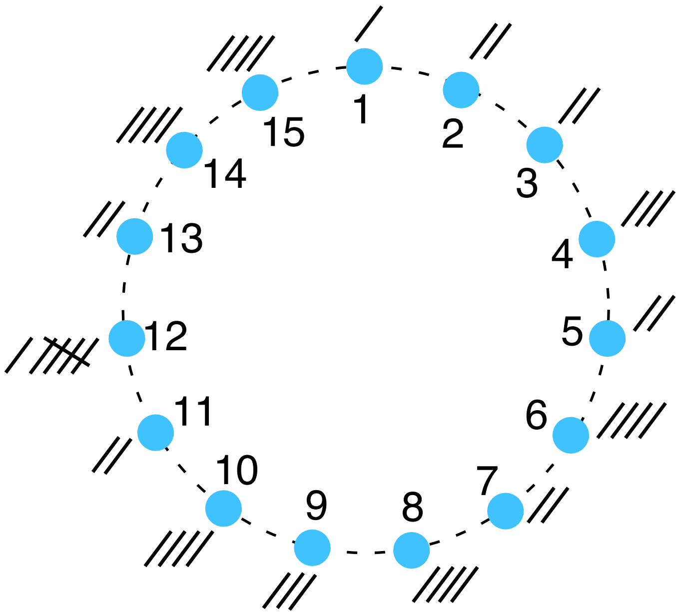
Domande possibili

- Chi dei suoi amici ne ha ricevuti di meno? Chi di più?
- Che qualità deve avere il numero di chi riceve più cioccolatini?
- Quanti cioccolatini aveva Marisa nel sacchetto?

A VOI…

Sapyent

Un altro modo di distribuire cioccolatini: soluzione



Questo problema è comodamente risolvibile mediante una simulazione che può essere fatta sia con materiali poveri sia con un disegno (vedi figura).

Altrimenti occorre passare dalla scomposizione in fattori primi.

Esempio: $n = 12 = 2^{2} \cdot 3^{1}$

Numero divisori: $(2+1) \cdot (1+1) = 6$

Risposte

- Il numero 1 (solo un cioccolatino); il 12 (6 cioccolatini)
- Deve avere più divisori degli altri.
- Marisa nel sacchetto aveva 45 cioccolatini.

Complemento: i numeri 2, 3, 5, 7, 11 e 13 ricevono 2 cioccolatini; sono numeri primi.

L'amnistia (da un'idea di Artur Engel, 1972)

Nella lontana Repubblica di Sikinia si celebra l'anniversario della costituzione. Per l'occasione, il presidente decide di concedere l'amnistia a un certo numero di carcerati.

La prigione si compone di 100 celle, numerate da 1 a 100. In ogni cella c'è un carcerato. La porta di ogni cella, sull'esterno, ha una maniglia che può essere girata in due sole posizioni: aperta (A) o chiusa (C).

All'inizio tutte le maniglie sono messe in posizione C.

Sapyent

Il presidente, amante dei giochi matematici, dà al secondino l'ordine seguente.

Inizia dalla cella 1 e, una dopo l'altra, gira tutte le maniglie.

Poi ritorna all'inizio e gira, partendo dalla 2, le maniglie di tutte le celle di numero pari.

Di nuovo torna all'inizio e, partendo dalla cella numero 3, gira tutte le maniglie delle celle dal numero divisibile per 3.

Poi fa la stessa cosa con le celle divisibili per 4, poi con quelle divisibili per 5, e così via fin che l'ultima fatica sarà solo quella di girare la maniglia della cella 100 partendo dalla cella numero 100.

Quali celle risulteranno aperte alla fine, permettendo così al carcerato che le occupa di uscire di prigione?

Sapyent

A VOI...

L'amnistia: traccia di soluzione

Rimarranno aperte alla fine le celle la cui maniglia viene azionata un numero **dispari** di volte, per esempio:

1 volta, **C**➔A, 3 volte **C**➔A➔C➔A , ecc.

La maniglia di una cella numero n viene azionata quando il secondino passa per la k-esima volta, con k divisore di n.
Per esempio, la maniglia della cella 6 viene azionata ai passaggi 1, 6, 2, 3 e basta.

Verrà liberato il prigioniero della cella numero q solo se q ha un **numero dispari di divisori**.

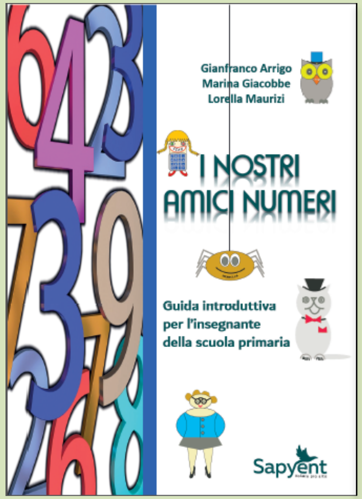
I divisori di un numero q si possono appaiare: $q = d_1 \times d_2$

Quando saranno in numero dispari?

Quando ci sarà una coppia $(d_1 ; d_1)$,
cioè quando q è un **numero quadrato**.

Sapyent

Una famiglia in evoluzione



Indirizzi utili

gianar76@gmail.com

www.dm.unibo.it/rsddm

www.smasi.ch

per ordinazioni

www.sapyentbooks.com/categoria-prodotto/libri/i-nostri-amici-numeri/